

Topologia I/I*, Egzamin (część teoretyczna)

2025-02-07

Rozwiązania zadań części teoretycznej nie muszą być napisane na oddzielnych kartkach. Każdą kartkę prosimy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia.

Zadanie 1 (8 p.).

1. Podaj definicję przestrzeni topologicznej.
2. Podaj definicję bazy przestrzeni topologicznej.
3. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Podaj definicję topologii iloczynu kartezjańskiego na zbiorze $X \times Y$.
4. Niech $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ będą bazami przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jak wyżej. Wykaż, że rodzina

$$\{U \times V \mid U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{B}'\}$$

jest bazą topologii iloczynu kartezjańskiego na $X \times Y$.

Zadanie 2 (6 p.).

1. Podaj definicję przestrzeni topologicznej zwartej.
2. Podaj, wraz z krótkim uzasadnieniem, przykład (nieskończonej) przeliczalnej przestrzeni topologicznej zwartej.
3. Udowodnij, że domknięta podprzestrzeń przestrzeni topologicznej zwartej jest zwarta.

Zadanie 3 (6 p.).

1. Podaj definicję homotopii pomiędzy odwzorowaniami ciągłymi przestrzeni topologicznych.
2. Podaj definicję przestrzeni ściąganej. Podaj, wraz z krótkim uzasadnieniem, przykład ściąganej podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej, która nie jest wypukła.
3. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Wykaż, że jeśli Y jest ściągana, to każde dwa odwzorowania ciągłe $X \rightarrow Y$ są homotopijne.

Topologia I/I*, Egzamin

2025-02-07

Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę prosimy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. We wszystkich rozwiązaniach należy podać uzasadnienie.

Zadanie 1 (10 p.). Niech $A_n = \{(x, y) \mid x \in [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}], x + y = 1 - \frac{1}{n}\}$ i niech

$$X = (\{0\} \times (0, 1]) \cup ((0, 1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n=3}^{\infty} A_n$$

będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej.

1. Wykaż, że przestrzeń X jest spójna.
2. Wykaż, że przestrzeń X nie jest łukowo spójna.

Zadanie 2 (10 p.). Niech $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty), y \in (0, x)\}$.

1. Sprawdź, czy X jest przestrzenią zupełną w metryce rzeki. Jeśli tak nie jest, to sprawdź, czy jest metryzowalna w sposób zupełny.
2. Sprawdź, czy X jest przestrzenią zupełną w metryce euklidesowej. Jeśli tak nie jest, to sprawdź, czy jest metryzowalna w sposób zupełny.

Zadanie 3 (10 p.). Niech $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ oznacza okrąg jednostkowy w płaszczyźnie euklidesowej.

1. Dla $A = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}$, sprawdź, czy S^1/A jest przestrzenią Hausdorffa.
2. Dla $B = \{(x, y) \in S^1 \mid xy \geq 0\}$, wykaż, że S^1/B nie jest przestrzenią ściągłą.

Zadanie 4 (10 p.). Rozstrzygnij, czy płaszczyzna z metryką kolejową ma podzbiór spójny, który nie jest łukowo spójny.